Neuman algebra and with weights on von Neuman algebras.
Keywords: partialy ordered vector space, order, noncommutative integration, duality.

УДК 517.51

ИСПРАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ЛАКУНАРНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

В.В. Новиков[1]

1 *vvnovikov@yandex.ru*; Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина, Энгельсский технологический институт (филиал)

Показано, что существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к матрице равноотстоящих узлов $T = \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1): -n \le k \le n,\ n = 1,2,\ldots\}$, такая что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C_{2\pi}$ на множестве как угодно малой меры (0,2,3)–интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходится к исправленной функции равномерно на $[-\pi,\pi]$.

Ключевые слова: лакунарная интерполяция, ряды Фурье, исправление функций.

Обозначим через $L_n(T,f,x)$, $n = 1,2,\ldots$, тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа функции $f \in C_{2\pi}$ с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$, а через $Q_n(T,f,x)$, $n = 1,2,\ldots$, (0,2,3)–интерполяционный полином Биркгофа такой, что

$$Q_n(T,f,x_{k,n}) = f(x_{k,n}),\ Q_n''(T,f,x_{k,n}) = Q_n'''(T,f,x_{k,n}) = 0,\ k = \overline{-n,n}.$$

Хорошо известно [1], что интерполяционный процесс $\{L_n(T,f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ для $f \in C_{2\pi}$ может расходиться при всех $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время, известно (см., напр. [2]), что любую измеримую (конечную п. в.) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (усиленное C-свойство, по терминологии Н.К. Бари). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к тому или иному интерполяционному процессу? В настоящей заметке показано, что существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к матрице равноотстоящих узлов $T = \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1): -n \le k \le n,\ n = 1,2,\ldots\}$, такая что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C_{2\pi}$ на множестве как угодно малой меры (0,2,3)–интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходится к исправленной функции g равномерно на $[-\pi,\pi]$.

Теорема. *Пусть последовательность $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{k,n}\}_{k=-n,n=1}^{n,\infty}$ со следующими свойствами:*

1) $|x_{k,n} - y_{k,n}| < \gamma_n$, $-n \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) для любых $f \in C_{2\pi}$, и $0 < \delta < 2\pi$ найдутся функция $g \in C_{2\pi}$ и множество $E \subset [-\pi,\pi]$, $\mathrm{mes} E > 2\pi - \delta$ такие, что $f = g$ на E и $\lim\limits_{n\to\infty} \left| Q_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g \right|_{C_{2\pi}} = 0$.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые обозначения и леммы. Пусть $f \in C_{2\pi}$, $n \ge 3$, и $\mathfrak{M}: -\pi < y_{-n,n} < y_{-n+1,n} < \ldots < y_{n,n} < \pi -$

произвольная матрица узлов интерполирования. Положим $\Delta_{i,n} = (y_{2i-1,n}, y_{2i+1,n})$, $\Delta^2 f_i = f(y_{2i+1,n}) - 2f(y_{2i,n}) + f(y_{2i-1,n})$, $|\Delta_{i,n}| = y_{2i+1,n} - y_{2i-1,n}$, $d_1(\mathfrak{M}, n) = \min_i |\Delta_{i,n}|$, $d_2(\mathfrak{M}, n) = \max_i |\Delta_{i,n}|$, и пусть

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}, f) = \left| \sum_{i=-[n/2]+1}^{[n/2]-1}{}' \frac{\Delta^2 f_i}{\varphi(2i+1, n, p)} \right|, \; R_n(\mathfrak{M}, f) = \max_{-n-1 \le p \le n} R_{n,p}(\mathfrak{M}, f),$$

где

$$\varphi\left(m, n, p\right) = \begin{cases} p-m, & \text{если } \left|p-m\right| \le 3\left([n/2]+1\right), \\ 2n - \left(p-m\right), & \text{если } p-m > 3\left([n/2]+1\right), \\ -2n - \left(p-m\right), & \text{если } p-m < -3\left([n/2]+1\right). \end{cases}$$

Здесь штрих у знака суммы указывает на отсутствие (не более двух) слагаемых, у которых индекс i является решением уравнения $\varphi(2k+1, n, p) = 0$; кроме того, считаем, что $y_{n+1,n} = \pi$, $y_{-n-1,n} = -\pi$. Для произвольного конечного множества $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_m\} \subset \mathbb{R}$ через $d(A) := \min_{i,j}\{|a_i - a_j| : a_i \ne a_j\}$ будем обозначать наименьшее положительное расстояние между его точками. Кроме того, как обычно, через C обозначаются абсолютные, вообще говоря различные, постоянные.

Лемма 1. *Существует последовательность $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$ такая, что для любой $f \in C_{2\pi}$ и любой матрицы узлов $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$, для которой*

$$|y_{i,n} - x_{i,n}| < \gamma_n, \; i = -n, \ldots, n; \; n \ge 3, \tag{1}$$

равенство

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, f) = 0$$

будет необходимым и достаточным условием для равномерной сходимости к f на $[-\pi, \pi]$ интерполяционного процесса $\{L_n(\mathfrak{M}_\gamma, f, x)\}$.

Утверждение леммы 1 является аналогом критерия сходимости из [3]. Оно может быть получено с использованием представление для разности $f(x) - L_n(T, f, x)$ из указанной работы, а также факта непрерывной зависимости фундаментальных многочленов интерполяции от узлов и $x \in [-\pi, \pi]$.

Следующую лемму технического характера также приведем без доказательства.

Лемма 2. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность из леммы 1 и $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$ — любая фиксированная матрица узлов, удовлетворяющая условию (1). Пусть, далее, $\sigma > 0$ — произвольное достаточно малое число и конечный набор точек $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ таков, что $\lambda_0 := -\pi < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m < \lambda_{m+1} := \pi$, $d(\Lambda) > \sigma$. Тогда найдется номер $n_0 = n_0(\sigma)$, зависящий только от σ, такой, что при $n > n_0$ равномерно по $p = -n-1, \ldots, n$ будут верны неравенства*

$$Q_{p,n}(\Lambda) := \sum_i |\varphi(2i+1, n, p)|^{-1} \le 5, \tag{2}$$

где суммирование идет по тем i, для которых $\varphi(2i+1, n, p) \ne 0$ и $\Delta_{i,n} \cap \Lambda \ne \varnothing$.

Лемма 3. *Существует последовательность $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$, для которой верно утверждение леммы 1 и, кроме того, обладающая следующим свойством: найдется* *функция* $\mu_n(x) \in C_{2\pi}$ *такая, что для любой* $f \in C_{2\pi}$

$$\lim_{n\to\infty} \left[f(x) - Q_n(\mathfrak{M}_\gamma, f, x) - \mu_n(x)\left(f(x) - L_n(\mathfrak{M}_\gamma, f, x)\right)\right] = 0$$

равномерно на $\mathbb{R}$.

Утверждение леммы 3 является вариантом теоремы о равносходимости интерполяции Лагранжа и лакунарной интерполяции из [4].

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $f \in C_{2\pi}$ — произвольная непрерывная функция и $0 < \delta < 2\pi$ — сколь угодно малое фиксированное число. Пусть, далее, $\gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность, для которой выполнены все сделанные выше предположения и $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$ — любая матрица такая, что верно (1). Потребуем, чтобы все точки $\{y_{i,n}\}$ были попарно различными и не совпадали с узлами сетки $t_{k,j} := -\pi + 2\pi k 2^{-j}$, $k = 1, ..., 2^j$, $j \in \mathbb{N}$. Положим

$$I_{k,j} := [-\pi + 2\pi(k-1)2^{-j}, -\pi + 2\pi k 2^{-j}],$$

$$\tilde{f}_j(x) := \min_{t\in I_{k,j}} f(t),\ x \in I_{k,j}, k = 1, ..., 2^j, j \in \mathbb{N},\ x \in [-\pi, \pi].$$

Последовательность $\{\tilde{f}_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ не убывает по j и равномерно сходится к f на $[-\pi, \pi]$. Положим $f_j(x) = \tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_{j-1}(x) \geq 0$, $\tilde{f}_0(x) \equiv 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ равномерно и абсолютно сходится к f на $[-\pi, \pi]$. Докажем, что $\forall j = 1, 2...$ и для любого $N_j \in \mathbb{N}$ существует функция $g_j \in C_{2\pi}$ такая, что

$$0 \leq g_j(x) \leq f_j(x),\ x \in [-\pi, \pi]; \tag{3}$$

$$\mathrm{mes}\{t \in [-\pi, \pi] : f_j(t) \neq g_j(t)\} < 2^{-j}\delta; \tag{4}$$

$$\max_n R_n(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) \leq C \left\| f_j \right\|_{C_{2\pi}} \to\ 0 \text{ при } j \to \infty; \tag{5}$$

$$R_n(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = 0\ , n = 1, \dots, N_j;\ j = 1, 2, \dots; \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = 0. \tag{7}$$

После того как функции $g_j(x)$ будут построены, мы покажем что $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ — искомая.

Обозначим через L множество точек разрыва функции f_j, лежащих в $[-\pi, \pi]$. Выберем и зафиксируем произвольный номер $M_j > N_j$ и пусть $D_0 := L \cup \{y_{i,s} \in [-\pi, \pi] : 1 \leq s \leq M_j\}$. В силу леммы 2 найдется номер $\mu(0)$ для которого

$$Q_{n,p}(D_0) \leq 5\ \forall n \geq \mu(0).$$

Здесь и всюду в дальнейшем мы не будем явно указывать область изменения p, подразумевая, что соответствующие соотношения верны для всех $p \in \{-n-1; \dots; n\}$. Пусть $\{\sigma_l\}_{l=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ — последовательность такая, что $\sigma_l \downarrow 0$ при $l \to \infty$, причем $\sigma_l / \sigma_{l-1} < 2^{-l}$, $l = 1, 2, \dots$; окончательно мы подберем ее позже.

Для каждого $t \in D_0$ построим замкнутую окрестность $[t - \sigma_0, t + \sigma_0]$, при этом σ_0 выберем настолько малым, что:

1) $\sigma_0 < 4^{-1}d(\tilde{D}_0)$, где $\tilde{D}_0 := D_0 \cup \{y_{i,s} \in [-\pi,\pi] : M_j + 1 \le s \le \mu(0)\}$;

2) общая длина окрестностей всех точек t из D_0 меньше, чем $2^{-j-1}\delta$;

3) $\max\{n : \ d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_0\} > \mu(0)$.

Если $t = \pm\pi$, то рассматриваем соответствующую одностороннюю окрестность.

Для $x \in [-\pi,\pi]$ положим

$$g_{0,j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in D_0; \\ f_j(x), & \text{если } x \in [-\pi,\pi] \setminus \cup_{t\in D_0}(t-\sigma_0, t+\sigma_0); \\ \text{линейная} & \text{на } [t-\sigma_k, t] \text{ и } [t, t+\sigma_k],\ t \in D_0. \end{cases}$$

Предположим, что уже определены множества $D_0, \dots, D_{l-1}$, выбраны числа $\sigma_0, \dots, \sigma_{l-1}$ и построены функции $g_{0,j}, \dots, g_{l-1,j}$, $l \ge 1$. Определим D_l, σ_l и построим $g_{l,j}$. Пусть $E_{u,v} := \cup_{s=u}^{v} \cup_{t\in D_s} [t-\sigma_s, t+\sigma_s]$ и $D_l := \{y_{i,s} : \ s = M_j + l, \ y_{i,s} \in [-\pi,\pi] \setminus E_{0,l-1}\}$. Для конечного множества $D_l \cup P_{l-1}$, где $P_{l-1} := \cup_{s=0}^{l-1} \cup_{t\in D_s} \{t-\sigma_s; \ t; \ t+\sigma_s\}$, найдем, применяя лемму 2, число $\mu(l)$ такое, что:

1) $Q_{n,p}(D_l \cup P_{l-1}) < 5$, $\forall n \ge \mu(l)$;

2) $\mu(l) > \min\{n : \ d_2(\mathfrak{M}_\gamma, n) \le \sigma_{l-1}\}$.

Теперь строим окрестности $[t-\sigma_l, t+\sigma_l]$, $t \in D_l$, выбирая σ_l так, что:

1) $\sigma_l < 4^{-1}d(\tilde{D}_l)$, где $\tilde{D}_l := D_l \cup \{y_{i,s} \in [-\pi,\pi] \setminus E_{0,l-1} : \ M_j + l \le s \le \mu(l)\}$;

2) общая длина окрестностей всех точек t из D_l меньше, чем $2^{-j-l}\delta$;

3) $\max\{n : \ d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_l\} > \mu(l)$.

Обозначим $h_{k,j} := f_j(x)$, $x \in I_{k,j}$ и для $x \in [-\pi,\pi]$ положим

$$g_{l,j}(x) = \begin{cases} h_{k,j}\sum_{s=1}^{l} 2^{-l}, & \text{если } x \in D_l \cap I_{k,j}; \\ g_{l-1,j}(x), & \text{если } x \in [-\pi,\pi] \setminus \cup_{t\in D_l}(t-\sigma_l, t+\sigma_l); \\ \text{линейная} & \text{на } [t-\sigma_l, t] \text{ и } [t, t+\sigma_l],\ t \in D_l. \end{cases}$$

Определим функцию $g_j(x) := \lim\limits_{l\to\infty} g_{l,j}(x)$, $x \in [-\pi,\pi]$, $j \in \mathbb{N}$. Выполнение (3)–(3) и (5), а также условия $g_j \in C_{2\pi}$ очевидно. Кроме того, используя определение g_j, можем проверить выполнение для нее условия $R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) \le C2^{-l}\left\|f_j\right\|_{C_{2\pi}}$, из которого следуют соотношения (4) и (6).

Положим $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j(x)$, $x \in [-\pi,\pi]$. Так как $g_j \in C_{2\pi}$ и в силу (3) ряд сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$, имеем $g \in C_{2\pi}$. Далее, из (3) следует, что

$$\mathrm{mes}\{x \in [-\pi,\pi] : f(x) \ne g(x)\} < \delta. \tag{8}$$

Наконец, с использованием (6), с помощью индукции по j нетрудно подбрать последовательность $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы для функции g выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, g) = 0. \tag{9}$$

В силу лемм 1 и 3 из (9) следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left\|Q_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\right\|_{C_{2\pi}} = 0,$$

которое совместно с (8) показывает, что функция g является искомой. Теорема доказана.

Литература

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2 – М.: Мир, 1965. – 537 с.

2. Бари Н. К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматлит, 1961. – 936 с.

3. Привалов А. А. *Теория интерполирования функций.* Кн. 2. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. – 1990. – 424 с.

4. Varma A. K.,Vertesi P. *Equiconvergence of some lacunary trigonometric interpolation polynomials* // J. Approx. Theory. – 1987. – V. 50. – P. 185–191.

ADJUSTMENT OF FUNCTIONS AND LACUNARY INTERPOLATION

V.V. Novikov

We prove that there exists a matrix of interpolation nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ with the properties: 1) $\mathfrak{M}_\gamma$ is arbitrarily close to the matrix of equidistant nodes $T = \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1) : \ -n \le k \le n, \ n = 1,2,\ldots\}$; 2) any function $f \in C_{2\pi}$ can be adjusted in a set of arbitrarily small measure such that the (0,2,3)-interpolation process of adjusted continuous function g based on the nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ will be uniformly convergent to g on $[-\pi,\pi]$.

Keywords: lacunary interpolation, Fourier series, adjustment of functions.

УДК 519.642

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ

А.В. Ожегова[1], Л.Э. Хайруллина[2]

1 *alla.ozhegova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского

2 *lxayrullina@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье исследуется слабосингулярное интегро-дифференциальное уравнение. Авторы вводят пару весовых пространств для доказательства корректности поставленной задачи. Далее к указанной задаче применяется итерационный метод и метод Галеркина и устанавливаются равномерные оценки погрешности.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение с логарифмической особенностью в ядре, приближенное решение, корректность задачи.

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$a(t)x(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t| \frac{x'(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = y(t), \quad -1 < t < 1, \tag{1}$$

где $a(t)$, $y(t)$ - известные непрерывно-дифференцируемые функции, $x(\tau)$ – искомая функция, удовлетворяющая условиям

$$x(-1) = x(1) = 0, \tag{2}$$